

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧИ, КОТОРЫЕ НЕ РЕШАЮТСЯ НА СУПЕРКОМПЬЮТЕРАХ?

Евгений Евгеньевич Тиртышников

Институт вычислительной математики Российской академии наук
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Московский физико-технический институт
eugene.tyrtysnikov@gmail.com

Москва, 22 ноября 2016



РАЗМЕРНОСТЬ – ЭТО ПРОКЛЯТИЕ ИЛИ БЛАГО?

Как задать элементы d -мерной матрицы
(тензора) $A = [a(i_1, \dots, i_d)]$ размера $n \times \dots \times n$?

- ▶ Если $d = 300$ и $n = 2$, то
число этих элементов $2^{300} \gg 10^{83}$
больше числа атомов во вселенной!



СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕНЗОРОВ

Чистый тензор (тензор ранга 1, скелетон):

$$a(i, j, k) = u(i)v(j)w(k).$$

Разделение переменных.

Каноническое разложение – это сумма чистых тензоров:

$$a(i, j, k) = \sum_{\alpha=1}^r u(i, \alpha)v(j, \alpha)w(k, \alpha)$$

Определяется тремя матрицами: $U = [u(:, 1), \dots, u(:, r)],$
 $V = [v(:, 1), \dots, v(:, r)], \quad W = [w(:, 1), \dots, w(:, r)].$

КАНОНИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

- ▶ Применяется как модель для данных. Флюоресцентная спектрометрия: n_1 смесей, найти число веществ и их концентрации. Данные измерений = массив размеров $n_1 \times n_2 \times n_3$, n_2 и n_3 – для частот излучателей и приемников. Каноническое разложение дает число веществ и концентрации.
- ▶ Применяется в теории сложности – основное средство при вычислении билинейных форм (Strassen, Pan, Bini и др.).
- ▶ Много трудных проблем - теоретических и вычислительных!

тензоры ранга $< r \rightarrow$ тензор ранга r

УМНОЖЕНИЕ 2×2 -МАТРИЦ

Правило “строка на столбец” дает 8 умножений:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

АЛГОРИТМ ШТРАССЕНА ДЛЯ БЫСТРОГО УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

В 1969 Штрассен (Strassen) открыл алгоритм, в котором всего 7 умножений. При умножении блочных 2×2 -матриц алгоритм Штрассена содержит 7 умножений блоков:

$$\alpha_1 = (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22})$$

$$\alpha_2 = (a_{21} + a_{22})b_{11}$$

$$\alpha_3 = a_{11}(b_{12} - b_{22})$$

$$\alpha_4 = a_{22}(b_{21} - b_{11})$$

$$\alpha_5 = (a_{11} + a_{12})b_{22}$$

$$\alpha_6 = (a_{21} - a_{11})(b_{11} + b_{12})$$

$$\alpha_7 = (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22})$$

$$c_{11} = \alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_7$$

$$c_{12} = \alpha_3 + \alpha_5$$

$$c_{21} = \alpha_2 + \alpha_4$$

$$c_{22} = \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2 + \alpha_6$$

КАНОНИЧЕСКОЕ ТЕНЗОРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ПОИСКА БЫСТРОГО АЛГОРИТМА УМНОЖЕНИЯ $n \times n$ МАТРИЦ

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \quad c_k = \sum_{i=1}^{n^2} \sum_{j=1}^{n^2} h_{ijk} a_i b_j$$

$$h_{ijk} = \sum_{\alpha=1}^R u_{i\alpha} v_{j\alpha} w_{k\alpha}$$

$$\Rightarrow c_k = \sum_{\alpha=1}^R w_{k\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n^2} u_{i\alpha} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n^2} v_{j\alpha} b_j \right)$$

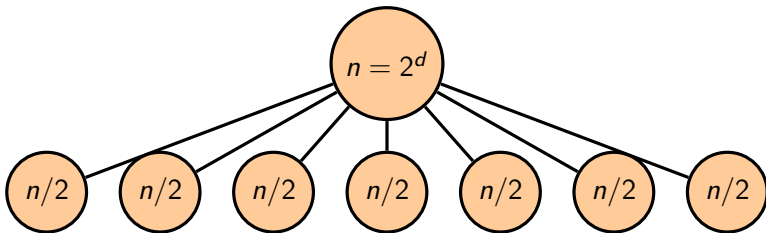
Теперь лишь R умножений блоков!

Если $n = 2$, то $R = 7$ (Strassen, 1969).

Рекурсия $\Rightarrow O(n^{\log_2 7})$ умножений для произвольного n .

РЕКУРСИЯ ДЛЯ БЫСТРОГО УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

Используя рекурсию, можно перемножить две матрицы порядка $n = 2^d$ с затратой не более $7^d = n^{\log_2 7}$ и $7n^{\log_2 7}$ сложений-вычитаний.



ТЕНЗОРЫ ПОВСЮДУ

How can tensors help pregnant women?

Martijn Bousé, Otto Debals, and Lieven De Lathauwer

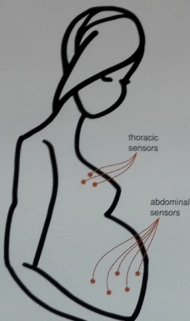
STADIUS (ESAT KU Leuven) – WPSP (Kulak) – iMinds

ABSTRACT

Measuring the electrocardiogram (ECG) of a pregnant woman results in a mixture of both the fetal ECG (FECG) and the maternal ECG (MECG). In order to analyze the health of the fetus, one needs to extract the FECG.

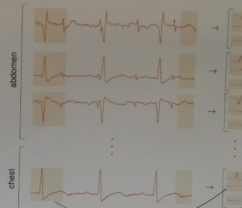
Our approach uses *segmentation* in order to derive a tensor, i.e., a multway array of numerical values, from the ECG recordings. The resulting tensor can be written as a sum of two terms using a *tensor decomposition*. From these two terms one can reconstruct the two ECG signals.

The approach uses the fact that the ECG signal of both mother and fetus have an intrinsic *smoothness*. Exploiting this structure enables the separation of the two ECG signals.



SEGMENTATION

The data consists of eight ECG recordings, five abdominal and three thoracic, which are segmented into eight matrices as shown below.



The recording is cut into several segments of equal length which are then stacked below each other in a matrix.

Stack all matrices into a tensor.

DECOMPOSITION

Decompose the resulting tensor into two block terms which are related to the FECG and MECG using a particular block term decomposition.

УВИДЕТЬ В ТЕНЗОРАХ МАТРИЦЫ

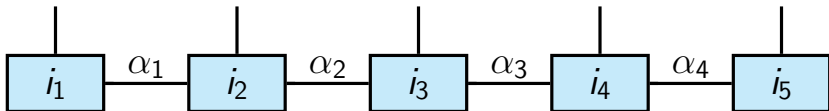
$$a(i_1; i_2, i_3) = \sum g_1(i_1, \alpha_1) a_1(\alpha_1; i_2, i_3)$$

$$a_1(\alpha_1, i_2; i_3) = \sum g_2(\alpha_1, i_2; \alpha_2) g_3(\alpha_2; i_3)$$

$$a(i_1, i_2, i_3) = \sum g_1(i_1, \alpha_1) g_2(\alpha_1, i_2, \alpha_2) g_3(\alpha_2, i_3)$$

ТЕНЗОРНЫЙ ПОЕЗД = MATRIX PRODUCT STATE= ЛИНЕЙНАЯ ТЕНЗОРНАЯ СЕТЬ

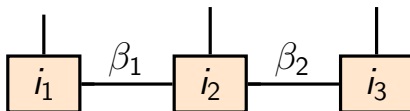
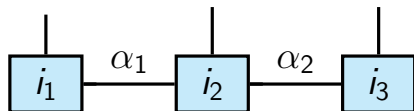
$$\begin{aligned} a(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) &= \\ \sum g_1(i_1, \alpha_1) g_2(\alpha_1, i_2, \alpha_2) g_3(\alpha_2, i_3, \alpha_3) g_4(\alpha_3, i_4, \alpha_4) g_5(\alpha_4, i_5) \\ &= \underbrace{A_1^{(i_1)}}_{1 \times r_1} \underbrace{A_2^{(i_2)}}_{r_1 \times r_2} \underbrace{A_3^{(i_3)}}_{r_2 \times r_3} \underbrace{A_4^{(i_4)}}_{r_3 \times r_4} \underbrace{A_5^{(i_5)}}_{r_4 \times 1} \end{aligned}$$



СЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРОВ

$$a(i_1, i_2, i_3) = \underbrace{A_1^{(i_1)}}_{1 \times r_1} \underbrace{A_2^{(i_2)}}_{r_1 \times r_2} \underbrace{A_3^{(i_3)}}_{r_3 \times 1},$$

$$b(i_1, i_2, i_3) = \underbrace{B_1^{(i_1)}}_{1 \times s_1} \underbrace{B_2^{(i_2)}}_{s_1 \times s_2} \underbrace{B_3^{(i_3)}}_{s_3 \times 1}$$



$$(a + b)(i_1, i_2, i_3) = \begin{bmatrix} A_1^{(i_1)} & B_1^{(i_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2^{(i_2)} \\ B_2^{(i_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3^{(i_3)} \\ B_3^{(i_3)} \end{bmatrix}$$

ТЕНЗОРНЫЙ ПОЕЗД

специальное представление d -мерной матрицы

$$a(i_1 \dots i_d) = \\ \sum g_1(i_1 \alpha_1) g_2(\alpha_1 i_2 \alpha_2) \dots \\ \dots g_{d-1}(\alpha_{d-2} i_{d-1} \alpha_{d-1}) g_d(\alpha_{d-1} i_d)$$

d -мерная матрица A представляется через трехмерные матрицы $g_k(\alpha_{k-1} i_k \alpha_k)$ размера $r_{k-1} \times n \times r_k$. Если $r_k \leq r$, то число параметров тензорного поезда $\leq dnr^2 \ll n^d$.

КОГДА ТЕНЗОРНЫЙ ПОЕЗД РЕАЛЬНО ПОМОГАЕТ?

$$\begin{aligned} A_k &= [a(i_1 \dots i_k; i_{k+1} \dots i_d)] = \\ &= \left[\sum u_k(i_1 \dots i_k; \alpha_k) v_k(\alpha_k; i_{k+1} \dots i_d) \right] = U_k V_k^\top \\ u_k(i_1 \dots i_k \alpha_k) &= \sum g_1(i_1 \alpha_1) \dots g_k(\alpha_{k-1} i_k \alpha_k) \\ v_k(\alpha_k i_{k+1} \dots i_d) &= \sum g_{k+1}(\alpha_k i_{k+1} \alpha_{k+1}) \dots g_d(\alpha_{k-1} i_d) \end{aligned}$$

Нужно, чтобы все матрицы A_k были близки к матрицам малого ранга.

ТЕНЗОРНЫЙ ПОЕЗД ДЛЯ d -МЕРНОЙ МАТРИЦЫ МОЖНО ПОСТРОИТЬ ПО "МАЛЫМ КРЕСТАМ" В МАТРИЦАХ A_k

$$A(i_1 \dots i_d) = \prod_{k=1}^d A(J_{\leq k-1}, i_k, J_{> k}) [A(J_{\leq k}, J_{> k})]^{-1}$$

I.Oseledets, E.Tyrtysnikov'2009

ИСТОРИЯ КРЕСТОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ

- 1985 Knuth: Semi-optimal bases for linear dependencies
- 1995 Tyr., Goreinov, Zamarashkin: $A = CGR$ pseudoskeleton
- 2000 Tyr.: incomplete cross approximation with ALS maxvol
- 2000 Bebendorf: $ACA =$ Gaussian elimination
- 2001 Tyr., Goreinov: maximum volume principle,
quasioptimality $\| \text{cross} \|_C \leq (r+1) \| \text{best} \|_2$
- 2006 Mahoney et al: randomized CUR algorithm
- 2008 Oseledets, Savostyanov, Tyr.: Cross3D
- 2009 Oseledets, Tyr.: TT-Cross
- 2010 J.Schneider: function-related quasioptimality
 $\| \text{cross} \|_C \leq (r+1)^2 \| \text{best} \|_C$
- 2011 Tyr., Goreinov: quasioptimality
 $\| \text{cross} \|_C \leq (r+1)^2 \| \text{best} \|_C$
- 2013 Ballani, Grasedyck, Kluge: HT-Cross
- 2013 Townsend, Trefethen -- Chebfun2

СТРОЧНО-СТОЛБЦЕВАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ МАТРИЦ

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad A_{11} \text{ is } r \times r$$

A интерполируется по первым r строкам и столбцам:

$$A_r = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} A_{11}^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}$$

ОШИБКА ИНТЕРПОЛЯЦИИ

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} A_{11}^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{bmatrix}$$

ПРИНЦИП МАКСИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА

ТЕОРЕМА (Горейнов, Тыртышников '2000)

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{11} \text{ is } r \times r$$

имеет максимальный объем (определитель по модулю) среди всех $r \times r$ блоков в A , и пусть

$$A_r = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} A_{11}^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\|A - A_r\|_C \leq (r+1) \underbrace{\min_{\text{rank } B \leq r} \|A - B\|_2}_{= \sigma_{r+1}(A)}.$$

НОВОЕ ПОНЯТИЕ – РЕДУЦИРОВАННЫЙ ОБЪЕМ

$$V_r(A) := \prod_{i=1}^r \sigma_i(A)$$

ТЕОРЕМА (А.И.Осинский – Н.Л.Замарашкин)

Let

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{M \times N},$$

где $A_{11} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ is имеет максимальный r -редуцированный объем среди всех $m \times n$ подматриц и $\text{rank } A_{11} \geq r$. Тогда

$$\|A - CA_{11}^\dagger R\|_C \leq \sqrt{1 + \frac{r}{m-r+1}} \sqrt{1 + \frac{r}{n-r+1}} \sigma_{r+1},$$

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}.$$

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ О РЕДУЦИРОВАННОМ ОБЪЕМЕ

Взяв крест, в котором на пересечении строк и столбцов находится подматрица размера $(2r - 1) \times (2r - 1)$, мы можем гарантировать оценку

$$\|A - CA_{11}^\dagger R\|_C \leq 2\sigma_{r+1}(A).$$

Достаточно выбрать подматрицу A_{11} с максимальным r -редуцированным объемом.

A.Osinsky, N.Zamarashlin, *Pseudo-skeleton approximations with better accuracy estimates*, submitted to LAA, 2016.

КВАЗИОПТИМАЛЬНОСТЬ ТЕЗОРНОГО ПОЕЗДА, ПОСТРОЕННОГО ПО КРЕСТАМ МАКСИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА

$$\tilde{A}(i_1 \dots i_d) = \sum_{k=1}^d \prod A(J_{\leq k-1}, i_k, J_{> k}) [A(J_{\leq k}, J_{> k})]^\dagger_{\tau_k}$$

THEOREM.

$$\|A - \tilde{A}\|_c \leq c(r) \cdot \underbrace{\|F\|_c}_{\text{BEST APPROXIMATION ERROR}}$$

$$c(r) = \frac{(4r)^{\lceil \log_2 d \rceil} - 1}{4r - 1} (r + 1)^2$$

ТЕНЗОРИЗАЦИЯ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ

Любой вектор размера $N = n_1 \dots n_d$ можно рассматривать как d -тензор, а любую $N \times N$ -матрицу

$$a(i, j) = a(i_1 \dots i_d, j_1 \dots j_d)$$

можно рассматривать как $2d$ -тензор или, а еще лучше как d -tensor размера $n_1^2 \times \dots \times n_d^2$, например такой:

$$a(i_1 j_1, \dots, i_d j_d)$$

Тензоризация плюс тензорный поезд (ТТ) позволяют радикально уменьшить число параметров представления!

БЫСТРОЕ СУММИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ АСТРОНОМИЧЕСКИ БОЛЬШОГО ВЕКТОРА

$$\sum_{i=1}^N a(i) = ? \quad N = 10^{83}$$

БЫСТРОЕ СУММИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ АСТРОНОМИЧЕСКИ БОЛЬШОГО ВЕКТОРА

$$i = \overline{i_1 i_2 \dots i_d} \quad d = 83$$

$$a(i) = a(i_1, \dots, i_d) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}} g_1(i_1, \alpha_1) g_2(\alpha_1, i_2, \alpha_2) \dots g_d(\alpha_{d-1}, i_d)$$

$$\sum_{i_1, \dots, i_d} a(i_1, \dots, i_d) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}} \hat{g}_1(\alpha_1) \hat{g}_2(\alpha_1, \alpha_2) \dots \hat{g}_d(\alpha_{d-1})$$

$$\hat{g}_k = \sum_{i_k} g_k$$

ТТ-ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Вычисляется d -мерный интеграл

$$I(d) = \int \sin(x_1 + x_2 + \dots + x_d) dx_1 dx_2 \dots dx_d =$$

$$\operatorname{Im} \int_{[0,1]^d} e^{i(x_1+x_2+\dots+x_d)} dx_1 dx_2 \dots dx_d = \operatorname{Im} \left(\left(\frac{e^i - 1}{i} \right)^d \right).$$

$n = 11$ узлов по каждому измерению $\Rightarrow$ всего n^d значений! Для построения ТТ-интерполяции из них реально вычисляется лишь *малая часть*.

d	$I(d)$	Относит. погрешность	Время
1000	-2.637513e-19	3.482065e-11	11.60
2000	2.628834e-37	8.905594e-12	33.05
4000	9.400335e-74	2.284085e-10	105.49

ТЕНЗОРИЗАЦИЯ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ОДНОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

приближается интегралом по конечному отрезку, а последний вычисляется по формуле прямоугольников.

Для машинной точности нужно порядка 2^{77} значений. Вектор значений рассматривается как тензор размеров $2 \times 2 \times \dots \times 2$.

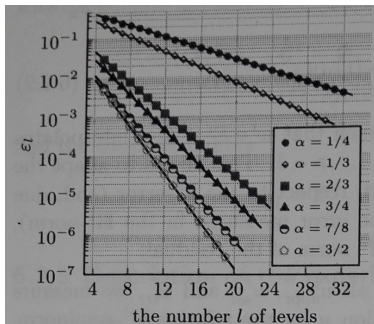
При ТТ-интерполяции с машинной точностью ТТ-ранги ≤ 12 .
Меньше 1 сек. на ноутбуке.

TT-FE APPROXIMATION

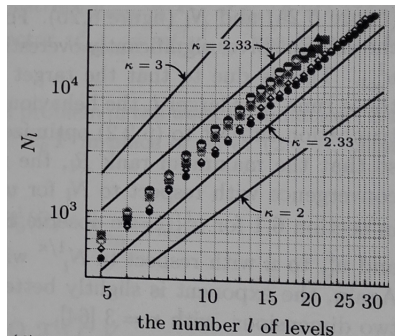
$$u_{\Gamma}(x) = r^{\alpha} \sin \alpha \phi(x), \quad x \in \Omega = (0, 1)^2$$

$$\varepsilon_l \leq \exp\left\{-c N_l^{\frac{1}{\kappa}}\right\}, \quad N_l - \text{the number of TT-elements}$$

THEOREM (V.Kazeev & C.Schwab). $\kappa \leq 5$.



(a) Convergence with respect to l . The reference lines correspond to the exponential convergence $\varepsilon_l = C_{\alpha} 2^{-\tilde{\alpha} l}$ with C_{α} independent of l and with $\tilde{\alpha} = \min\{\alpha, 1\}$.

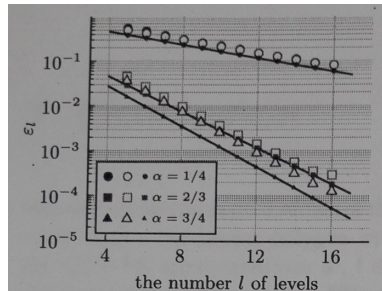


(d) The number N_l (3.3.2) of QTT parameters vs. l . The reference lines correspond to the algebraic growth $N_l = C_{\alpha} l^{\kappa}$ with κ and C_{α} independent of l .

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = u_\Gamma$$

$$\Omega = (0, 1)^2 \setminus [0, 1) \times (-1, 0]$$

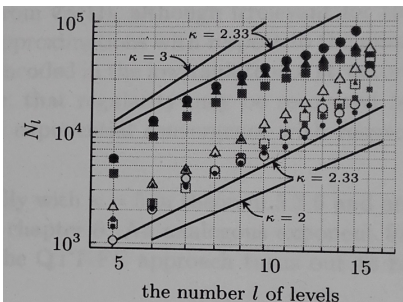
bright labels



(a) Convergence with respect to l . The reference lines correspond to the exponential convergence $\varepsilon_l = C_\alpha 2^{-\alpha l}$ with C_α independent of l . The markers for u_{sol}^l and u_{tr}^l mostly coincide.

$$\Omega = (0, 1)^2 \setminus [0, 1) \times \{0\}$$

black labels



(d) The number N_l (3.3.2) of QTT parameters vs. l . The reference lines correspond to the algebraic growth $N_l = C_\alpha l^\kappa$ with κ and C_α independent of l .

(V.Kazeev)

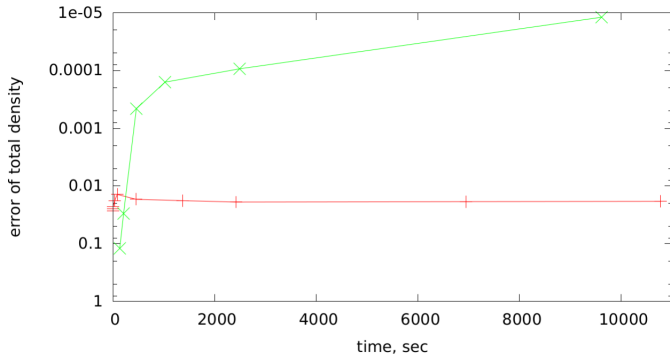
LOW RANK AND TENSOR TRAINS IN THE SMOLUCHOWSKI EQUATIONS

- ▶ $\bar{v} = (v_1, \dots, v_d)$ – volumes of different substances of a particle
- ▶ t – time
- ▶ $n(\bar{v}, t)$ – concentration function for volume components of a particle

$$\begin{aligned}\frac{\partial n(\bar{v}, t)}{\partial t} = & \frac{1}{2} \int_0^{v_1} du_1 \dots \int_0^{v_d} K(\bar{v} - \bar{u}; \bar{u}) n(\bar{u}, t) n(\bar{v} - \bar{u}, t) du_d - \\ & - n(\bar{v}, t) \int_0^\infty du_1 \dots \int_0^\infty K(\bar{v}; \bar{u}) n(\bar{u}, t) du_d, \\ & n(\bar{v}, 0) = n_0(\bar{v}).\end{aligned}$$

Joint work with S. Matveev and A. Smirnov

TENSOR TRAIN VS MONTE CARLO FOR 2D SMOLUCHOWSKI EQUATIONS



Monte Carlo, N particles from 2 000 to 8 000 000 —+—
TT method, N grid nodes per axis from 100 to 4 000 —x—

Ballistic kernel: $K(u, v) = (u^{\frac{1}{3}} + v^{\frac{1}{3}})^2 \sqrt{\frac{1}{u} + \frac{1}{v}}.$

ТЕНЗОРНЫЙ ПОЕЗД КАК ИНСТРУМЕНТ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

ТЕОРЕМА. Если $A_{\blacksquare}$ имеет максимальный объем среди всех $r \times r$ блоков в A , то

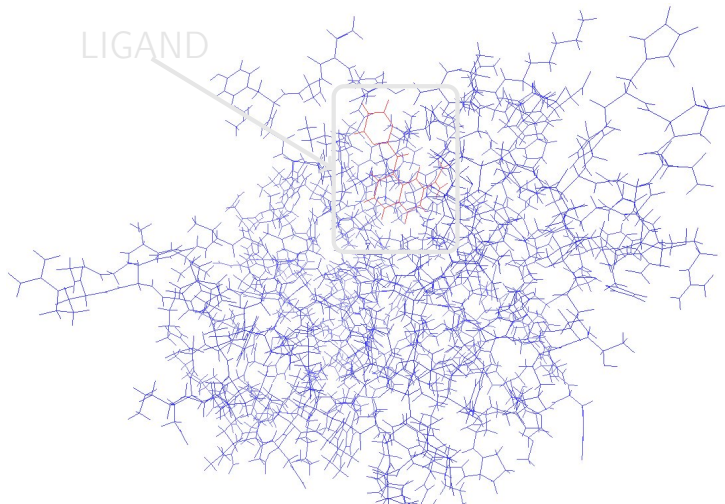
$$\|A_{\blacksquare}\|_c \geq \|A\|_c / (2r^2 + r).$$



S. Goreinov, I. Oseledets, D. Savostyanov, E. Tyrtysnikov, N. Zamarashkin, How to find a good submatrix, *Matrix Methods: Theory, Algorithms and Applications. Devoted to the Memory of Gene Golub* (eds. V.Olshevsky and E.Tyrtysnikov), World Scientific Publishers, Singapore, 2010, pp. 247–256.

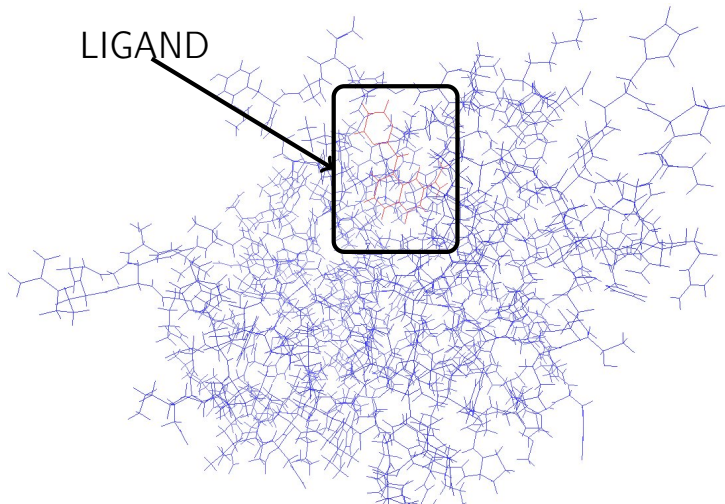
ПРЯМОЙ ДОКИНГ ПРИ РАЗРАБОТКЕ ЛЕКАРСТВ

ACCOMMODATION OF LIGAND INTO PROTEIN

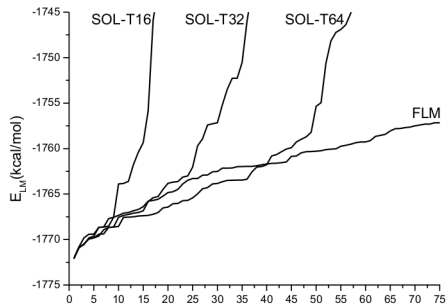
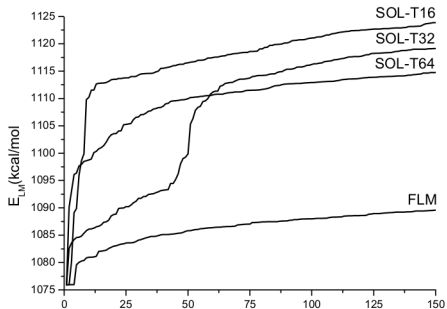


ПРЯМОЙ ДОКИНГ ПРИ РАЗРАБОТКЕ ЛЕКАРСТВ

ACCOMMODATION OF LIGAND INTO PROTEIN



DIRECT DOCKING IN THE DRUG DESIGN



Joint work with D.Zheltkov and V.Sulimov

WELCOME THE BLESSING OF DINENSIONALITY

- ▶ Fokker-Planck, Smoluchovski equations
- ▶ Differential equations with parameters
- ▶ Green functions in integral equations
- ▶ Spin dynamics
- ▶ Global optimization algorithms
- ▶ Many others

RECENT BOOKS:

G. Golub and Ch. Van Loan, Matrix Computations, 4th edition, 2013.

W. Hackbusch, Tensor Spaces and Numerical Tensor Calculus, Springer, 2012.



Е. Е. Тыртышников
член-корреспондент РАН,
директор Института вычислительной математики РАН,
профессор Московского государственного
университета им. М. В. Ломоносова
и Московского физико-технического института.

*Эту книгу я посвящаю тем, кто любит алгебру, и особенно тем,
кто начинает изучать ее в университете, обычно на первом курсе.*

Читать или лекции – особое удовольствие!

*Оттого что видишь, как каждый из нас по-своему тянется к знанию
и как зажигаются чудесные огоньки в глазах,
когда возникает понимание. Уже через пару лет с горечью
замечаешь, что у многих тяга к знанию ослабла и огоньков
совсем мало. Наверное, мы как-то не так учим?*

Я далек от того, чтобы преувеличивать значение дидактики.

*Но согласитесь, трудный путь к пониманию очень часто
освещается вдруг всего лишь одним верным словом.*

Мне хотелось найти это слово.

ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ



Е. Е. ТЫРТЫШНИКОВ

ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ

$$a_{ijk} = \sum_{a=1}^R u_{ia} v_{ja} w_{ka}$$

$$\bar{S}_k \neq S_k$$